

Analiza Matematyczna II.2, kolokwium

8 maja 2015 r., godz. 12:05 — 15:05

Rozwiązania różnych zadań należy napisać na różnych kartkach, bo sprawdzą je różne osoby. Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU imieniem i nazwiskiem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia.

Nie wolno korzystać z urządzeń elektronicznych (kalkulatorów, telefonów komórkowych itp.); posiadane muszą być schowane i wyłączone! Nie dotyczy rozruszników serca.

Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały udowodnione na wykładzie lub na ćwiczeniach.

0. Sformułować twierdzenie Greena dla łamanej zwykłej zamkniętej.

Wykazać, że $\frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \left(\frac{-(y-b)}{(x-a)^2+(y-b)^2} dx + \frac{(x-a)}{(x-a)^2+(y-b)^2} dy \right)$ jest liczbą całkowitą dla dowolnego punktu (a, b) , przez który nie przechodzi krzywa γ , gdzie $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

1. Obliczyć miarę (dwuwymiarową) powierzchni $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, y^2 + z^2 \leq 1\}$.
Znaleźć środek ciężkości jej części zawartej w zbiorze $\{(x, y, z) : z > 0, y > |x|\}$
-

2. Oblicz objętość bryły opisanej nierównością $(x^2 + y^2 + z^2)^2 \leq 2xyz$.
-

3. Obliczyć $\int_0^\infty \frac{\arctg(\pi x) - \arctg x}{x} dx$.
-

4. Obliczyć $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^\infty \frac{\ln(x^n + 2^n)}{nx^2} dx$.
-

.....

5. Niech M oznacza zbiór złożony z takich macierzy kwadratowych A o 3 wierszach, że $A^T A = I$ i $\det A = 1$. Zbiór M jest trójwymiarową rozmaitością zwartą w $\mathbb{R}^9$.

Dowieść, że przekształcenie $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$ na siebie jest obrotem o pewien kąt $\theta(A) \in [0, \pi]$ wokół pewnej prostej $\ell(A)$ przechodzącej przez $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$.

Obliczyć wartość średnią funkcji θ , czyli wielkość

$$\frac{1}{\ell_M(M)} \int_M \theta(A) d\ell_M(A),$$

gdzie ℓ_M oznacza miarę Riemanna–Lebesgue’a na rozmaitości M .
